

中国奥林匹克数学联赛

暨青少年数学素质素养测评活动

注意事项：

- 1、考生按要求用黑色、蓝色中性笔或钢笔在密封线内认真填写考生个人信息。
- 2、考试时间为90分钟。
- 3、本试卷共4页，满分为120分。
- 4、考生不得在试卷任何区域作任何与考试无关的标记或符号。
- 5、答题区外不得答题，否则该题不得分。
- 6、考试期间不得携带任何与本场考试无关的书籍、笔记或电子产品，一经发现记零分。

总分	
阅卷人	

第二十一届（夏）六年级初赛试卷

一、选择题。（每题5分，共5小题，合计25分）

- 1、若一个整数的某个数字等于其它数字之和，则称这样的数字为“妙妙数”那么四位数中最大的妙妙数和最小的妙妙数之差是（ ）。

A、8899 B、7789 C、6689 D、5589
- 2、三个不同正整数的和为564，其中第一个数除以3，余数为1，第二个数除以5，余数为3，第三个数除以7，余数为5，商一样，则相同的商为（ ）。

A、15 B、21 C、35 D、37
- 3、A, B, C都是自然数， $A \times B \times C = 2160$ ，那么 $A+B+C$ 的最小值为（ ）。

A、40 B、312 C、549 D、1728
- 4、猛虎连一个小战士从A地前往B地送鸡毛信，他每走40分钟，休息10分钟，到达B地共需4小时20分；从B地原路返回A地速度是去时的2倍，若他每走35分钟休息15分钟，那么从A地返回B地共需（ ）。

A、125分钟 B、130分钟 C、135分钟 D、140分钟
- 5、奥克和奥林两人加工一批零件，每人各加工一半，两人同时开始，当奥克完成任务的 $\frac{1}{3}$ 时，奥林加工了50个零件；当奥克完成任务的 $\frac{3}{5}$ 时，奥林完成了任务的一半，这批零件共有（ ）个。

A、600 B、420 C、350 D、360

学校：

准考证号：

年级：

密

姓名：

二、填空题。（每题4分，共10小题，合计40分）

- 1、奥克妈妈买回苹果和梨共39个，吃掉了4个苹果后，剩下的苹果和梨的数量之比为3:2。那么妈妈买回了_____个苹果。
- 2、新华书店售出一套《奥数大讲堂》课外书，如果该书的进价降低10%，那么利润率就会增加15个百分点，则原来的利润率为_____%。
- 3、设“中”，“奥”两个汉字代表两个数字，并且满足 $\frac{中}{11} + \frac{奥}{3} = \frac{17}{33}$ ，那么中+奥=_____。
- 4、北京什刹海小学六年级男生人数是女生人数的 $\frac{2}{3}$ ，后来又转来2名男生，转走3名女生，这时男生人数是女生人数的 $\frac{3}{4}$ ，那么现在该年级共有_____人。
- 5、把一个假分数 $\frac{a}{7}$ 化为小数后，整数部分是1，小数点后第2017位上的数字是2，那么a的值是_____。
- 6、在直角 $\triangle ABC$ 中， $AC=BC=10$ 厘米，点D和点E分别从A, B两点同时出发向点C运动，点D和点E的速度分别是1厘米/秒和2厘米/秒，运动过程中，AE与BD交于点P，当点E运动到点C时，点D和点E同时停止运动，若t秒时， $\triangle ADP$ 的面积比 $\triangle BEP$ 的面积少16平方厘米，则t=_____秒。
- 7、故宫博物馆有一口老式座钟，由于当时工艺的问题，这口钟时针和分针每隔66分钟才重合一次，那么这口钟每昼夜比实际时间慢_____分钟。
- 8、 $\frac{2^2}{1 \times 3} + \frac{4^2}{3 \times 5} + \frac{6^2}{5 \times 7} + \frac{8^2}{7 \times 9} + \dots + \frac{100^2}{99 \times 101} = \dots$
- 9、化学老师要配制一定浓度的硫酸做实验，他先取出容积一样的甲，乙两个量杯，已知甲杯中硫酸和水的比是2:9，乙杯中硫酸与水的比是3:10，（两杯都装满），现在将两杯硫酸溶液混合，此时老师配制的硫酸的浓度是_____。
- 10、已知等式 $\frac{1}{35} = \frac{1}{数} + \frac{1}{学}$ ，其中数，学两字所代表的数是正整数，求数+学的最大值是_____。

三、解决问题。(1题7分, 2题8分, 3、4题每题10分, 合计35分)

得分

1、纳索拉丁是阿拉伯著名数学家, 他曾经做出过“两个奇数的平方和肯定不是平方数”的判断。

我们不妨设两个奇数分别为 $(2m+1)$ 和 $(2n+1)$, m, n 都是整数。若两者的平方和等于一个数的平方, 则这个数不是奇数, 就是偶数。下面就这两种情况分别反证。

若这个奇数为 $(2a+1)$, 则有 $(2m+1)^2 + (2n+1)^2 = (2a+1)^2$ 展开为

$4m^2+4m+1+4n^2+4n+1=4a^2+4a+1$ 可简化为 $2(\underline{\hspace{2cm}})=4(a^2+a)+1$

根据奇偶性, 等式左边是____数, 右边是____数, 等式矛盾。

若这个数为偶数 $2a$ (a 为整数), 则有 $(2m+1)^2 + (2n+1)^2 = (2a)^2$ 可简化为

$4m^2+4m+1+4n^2+4n+1=4a^2$, 再次简化为 $2(2m^2+2m+2n^2+2n+1)=4a^2$, 即为

$2(\underline{\hspace{2cm}})+1=2a^2$. 根据奇偶性等式左边是____数, 右边是____数, 两者矛盾。

所以两个奇数的平方和不可能等于一个平方数。



2、一个直角三角形三条边长度之比为 $3:4:5$, 那么分别以各边为轴旋转一周得到的立体图形中, 体积最大和体积最小的体积之比是多少?

3、中国第三艘航空母舰正在紧密锣鼓的制造中, 其中发动机上有一款零件只有高级技工奥克和奥林可以制造, 已知他们合作需要24天完成, 先由奥克做16天, 然后再由奥林做12天, 还剩下这批零件的 $\frac{2}{5}$ 未完成。已知奥克比奥林每天多加工3个, 那么这艘航母需要这种零件共多少个?

4、关于 X 的方程 $k^2x-12=3x+3k^2$ 的解为整数, 并且 k 为一个正整数, 请求出 k 的值, 并求解。

得分

四、创新题。(每题10分, 共2小题, 合计20分)

1、一个数的 n 次方可以记为 $a^n=a \times a \times a \times \dots \times a$ (共 n 个 a 相乘)

观察以下等式: $(x-1)(x+1)=x^2-1$

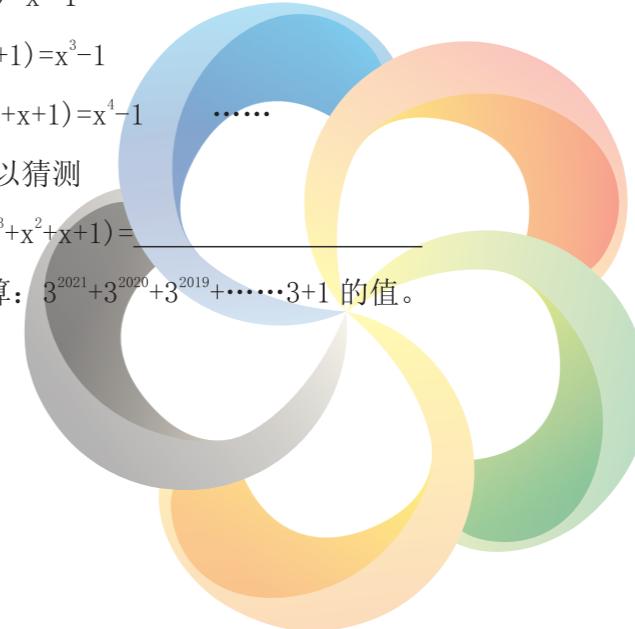
$$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$$

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=x^4-1$$

由上述等式的规律, 我们可以猜测

$$(1) (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x^3+x^2+x+1)=\underline{\hspace{2cm}}$$

(2) 利用(1)中的结论计算: $3^{2021}+3^{2020}+3^{2019}+\dots+3+1$ 的值。



2、三个不同质数 a 、 b 、 c , 其中 a^2 、 b^2 、 c^2 的结果末位相同, 已知 $a^2+b^2+c^2=2387$, 求 $(a+b+c)^2$ 的值是多少?