

【绝密★启用前】

# 中国奥林匹克数学联赛 暨青少年数学素质素养测评活动

## 注意事项：

- 1、考生按要求用黑色、蓝色中性笔或钢笔在密封线内认真填写考生个人信息。
- 2、考试时间为90分钟。
- 3、本试卷共4页，满分为120分。
- 4、考生不得在试卷任何区域作任何与考试无关的标记或符号。
- 5、答题区外不得答题，否则该题不得分。
- 6、考试期间不得携带任何与本场考试无关的书籍、笔记或电子产品，一经发现记零分。

总分	
阅卷人	

## 第二十一届（夏）六年级初赛试卷

得分

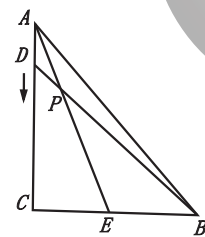
### 一、选择题。（每题 5 分，共 5 小题，合计 25 分）

- 1、若一个整数的某个数字等于其它数字之和，则称这样的数字为“妙妙数”那么四位数中最大的妙妙数和最小的妙妙数之差是（ ）。  
A、8899      B、7789      C、6689      D、5589
- 2、三个不同正整数的和为 564，其中第一个数除以 3，余数为 1，第二个数除以 5，余数为 3，第三个数除以 7，余数为 5，商一样，则相同的商为（ ）。  
A、15      B、21      C、35      D、37
- 3、A,B,C 都是自然数， $A \times B \times C = 2160$ ，那么  $A+B+C$  的最小值为（ ）。  
A、40      B、312      C、549      D、1728
- 4、猛虎连一个小战士从 A 地前往 B 地送鸡毛信，他每走 40 分钟，休息 10 分钟，到达 B 地共需 4 小时 20 分；从 B 地原路返回 A 地速度是去时的 2 倍，若他每走 35 分钟休息 15 分钟，那么从 A 地返回 B 地共需（ ）。  
A、125 分钟      B、130 分钟      C、135 分钟      D、140 分钟
- 5、奥克和奥林两人加工一批零件，每人各加工一半，两人同时开始，当奥克完成任务的  $\frac{1}{3}$  时，奥林加工了 50 个零件；当奥克完成任务的  $\frac{3}{5}$  时，奥林完成了任务的一半，这批零件共有（ ）个。  
A、600      B、420      C、350      D、360

得分

### 二、填空题。（每题 4 分，共 10 小题，合计 40 分）

- 1、奥克妈妈买回苹果和梨共 39 个，吃掉了 4 个苹果后，剩下的苹果和梨的数量之比为 3:2。那么妈妈买回了\_\_\_\_\_个苹果。
- 2、新华书店售出一套《奥数大讲堂》课外书，如果该书的进价降低 10%，那么利润率就会增加 15 个百分点，则原来的利润率为\_\_\_\_\_%。
- 3、设“中”，“奥”两个汉字代表两个数字，并且满足  $\frac{\text{中}}{11} + \frac{\text{奥}}{3} = \frac{17}{33}$ ，那么中+奥=\_\_\_\_\_。
- 4、北京什刹海小学六年级男生人数是女生人数的  $\frac{2}{3}$ ，后来又转来 2 名男生，转走 3 名女生，这时男生人数是女生人数的  $\frac{3}{4}$ ，那么现在该年级共有\_\_\_\_\_人。
- 5、把一个假分数  $\frac{a}{7}$  化为小数后，整数部分是 1，小数点后第 2017 位上的数字是 2，那么 a 的值是\_\_\_\_\_。
- 6、在直角  $\triangle ABC$  中， $AC=BC=10$  厘米，点 D 和点 E 分别从 A,B 两点同时出发向点 C 运动，点 D 和点 E 的速度分别是 1 厘米/秒和 2 厘米/秒，运动过程中，AE 与 BD 交于点 P，当点 E 运动到点 C 时，点 D 和点 E 同时停止运动，若 t 秒时， $\triangle ADP$  的面积比  $\triangle BEP$  的面积少 16 平方厘米，则 t=\_\_\_\_\_秒。



- 7、故宫博物馆有一口老式座钟，由于当时工艺的问题，这口钟时针和分针每隔 66 分钟才重合一次，那么这口钟每昼夜比实际时间慢\_\_\_\_\_分钟。
- 8、 $\frac{2^2}{1 \times 3} + \frac{4^2}{3 \times 5} + \frac{6^2}{5 \times 7} + \frac{8^2}{7 \times 9} + \dots + \frac{100^2}{99 \times 101} =$ \_\_\_\_\_。
- 9、化学老师要配制一定浓度的硫酸做实验，他先取出容积一样的甲，乙两个量杯，已知甲杯中硫酸和水的比是 2:9，乙杯中硫酸与水的比是 3:10，（两杯都装满），现在将两杯硫酸溶液混合，此时老师配制的硫酸的浓度是\_\_\_\_\_。
- 10、已知等式  $\frac{1}{35} = \frac{1}{\text{数}} + \frac{1}{\text{学}}$ ，其中数，学两字所代表的数是正整数，求数+学的最大值是\_\_\_\_\_。

### 三、解决问题。(1题7分,2题8分,3、4题每题10分,合计35分)

得分	
----	--

1、纳索拉丁是阿拉伯著名数学家,他曾经做出过“两个奇数的平方和肯定不是平方数”的判断。

我们不妨设两个奇数分别为 $(2m+1)$ 和 $(2n+1)$ , $m,n$ 都是整数。若两者的平方和等于一个数的平方,则这个数不是奇数,就是偶数。下面就这两种情况分别反证。

若这个奇数为 $(2a+1)$ ,则有 $(2m+1)^2 + (2n+1)^2 = (2a+1)^2$ 展开为  
 $4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 4a^2 + 4a + 1$ 可简化为 $2(\text{_____}) = 4(a^2 + a) + 1$

根据奇偶性,等式左边是\_\_\_\_\_数,右边是\_\_\_\_\_数,等式矛盾。

若这个数为偶数 $2a$ ( $a$ 为整数),则有 $(2m+1)^2 + (2n+1)^2 = (2a)^2$ 可简化为  
 $4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 4a^2$ ,再次简化为 $2(2m^2 + 2m + 2n^2 + 2n + 1) = 4a^2$ ,即为  
 $2(\text{_____}) + 1 = 2a^2$ .根据奇偶性等式左边是\_\_\_\_\_数,右边是\_\_\_\_\_数,两者矛盾。  
 所以两个奇数的平方和不可能等于一个平方数。



2、一个直角三角形三条边长度之比为3:4:5,那么分别以各边为轴旋转一周得到的立体图形中,体积最大和体积最小的体积之比是多少?

3、中国第三艘航空母舰正在紧锣密鼓的制造中,其中发动机上有一款零件只有高级技工奥克和奥林可以制造,已知他们合作需要24天完成,先由奥克做16天,然后再由奥林做12天,还剩下这批零件的 $\frac{2}{5}$ 未完成。已知奥克比奥林每天多加工3个,那么这艘航母需要这种零件共多少个?

4、关于 $X$ 的方程 $k^2x - 12 = 3x + 3k^2$ 的解为整数,并且 $k$ 为一个正整数,请求出 $k$ 的值,并求解。

得分	
----	--

### 四、创新题。(每题10分,共2小题,合计20分)

1、一个数的 $n$ 次方可以记为 $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$ (共 $n$ 个 $a$ 相乘)

观察以下等式:  $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$

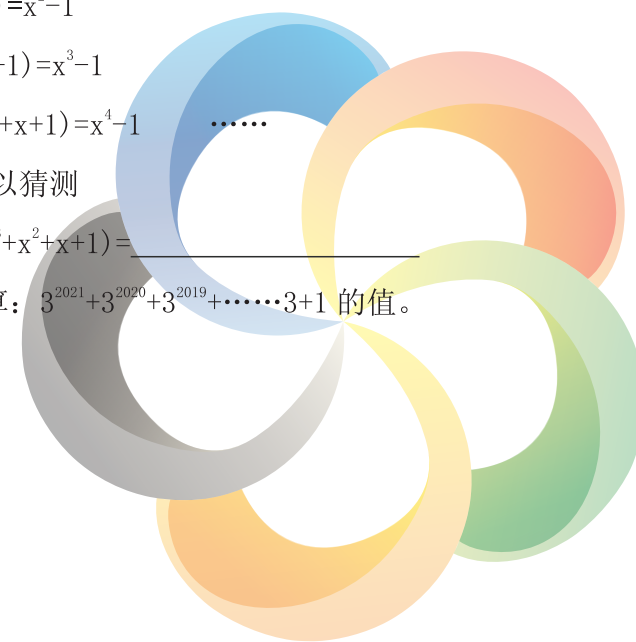
$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$$

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1) = x^4 - 1 \quad \dots\dots$$

由上述等式的规律,我们可以猜测

(1)  $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^3 + x^2 + x + 1) = \text{_____}$

(2) 利用(1)中的结论计算:  $3^{2021} + 3^{2020} + 3^{2019} + \dots + 3 + 1$  的值。



2、三个不同质数 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ,其中 $a^2$ 、 $b^2$ 、 $c^2$ 的结果末位相同,已知 $a^2 + b^2 + c^2 = 2387$ ,求 $(a+b+c)^2$ 的值是多少?